**11-1 滚动作为平移与旋转结合** 2021年3月26日15点35分——2021年4月15日13点53分

**什么是物理?**

正如我们在第10章中讨论的那样,物理学包括对旋转的研究.可以说,物理学最重要的应用是在轮子和类似轮子的物体的滚动运动中.这种应用物理学早已被使用.例如,当复活节岛的史前人们将其巨大的石像从采石场转移到整个岛上时,他们将它们拖到充当滚轮的原木上.后来,当定居者在1800年代向西穿越美国时,他们首先用货车将其财产翻滚,然后再乘火车滚动.如今,不管喜欢与否,世界上到处都是汽车,卡车,摩托车,自行车和其他滚动车辆.

轧制的物理学和工程学已经存在了很长时间,以至于您可能认为没有新的想法有待开发.但是,滑板和直排轮滑鞋是最近才发明和设计的,在商业上取得了巨大的成功.街头的喧嚣现在正在流行,自动扶正的Segway(图11-1)可能会改变人们在大城市中的出行方式.应用滚动物理学仍然可以带来惊喜和回报.我们探索物理学的出发点是简化滚动运动.

**滚动作为平移与旋转结合**

在这里,我们只考虑沿着表面平滑滚动的物体;也就是说,物体滚动时不会在表面滑动或弹跳.图11-2显示了平滑的滚动运动是多么复杂:尽管对象的中心沿平行于曲面的直线移动,但边缘上的点肯定不会.但是,我们可以通过将其视为质心平移和其余物体围绕该中心旋转的组合来研究此运动.

要了解我们如何做到这一点,请假装您站在人行道上,看着图11-3的自行车车轮沿着街道滚动.如图所示,您可以看到轮子的质心以恒定速度向前移动.车轮与路面接触的街道上的点也以速度向前移动,因此P始终保持在O的正下方.

在时间间隔内,您看到和都向前移动了距离.骑自行车的人看到车轮绕车轮中心旋转了一个角度,在的起点处接触街道的车轮点移动了弧长.公式10-17将弧长与旋转角相关联:

其中是车轮的半径.车轮中心(此均匀车轮的质心)的线速度为.车轮绕其中心的角速度为.因此,相对于时间(在R保持恒定的情况下)对方程11-1进行微分可以得出

**组合** 图11-4显示了车轮的滚动运动是纯平移运动和纯旋转运动的组合.图11-4a显示了纯粹的旋转运动(就像通过中心的旋转轴是固定的):车轮上的每个点都以角速度绕中心旋转.(这是我们在第10章中考虑的运动类型.)车轮外边缘上的每个点都具有由公式11-2给出的线速度.图11-4b显示了纯平移运动(好像车轮根本没有旋转):车轮上的每个点都以速度向右移动.

图11-4a和11-4b的组合产生了车轮的实际滚动运动,图11-4c.请注意,在这种运动组合中,车轮底部(点P)处的部分是固定的,而顶部(点T)处的部分则以的速度运动,这比车轮的任何其他部分都快.这些结果在图11-5中得到了证明,它是滚动自行车车轮的时间曝光.您可以说出轮子在顶部附近比底部附近移动得更快,

因为轮辐在顶部比底部更模糊.如图11-4a和11-4b所示,在表面上平滑滚动的任何圆形物体的运动都可以分为纯旋转运动和纯平移运动.

**滚动作为纯旋转**

图11-6提出了另一种观察车轮滚动运动的方法,即围绕轴线的纯旋转,该轴线始终延伸到车轮运动时车轮与街道接触的点.我们认为滚动运动是绕经过图11-4c中的点P并垂直于图平面的轴的纯旋转.然后,图11-6中的矢量代表滚轮上各点的瞬时速度.

问题:静止的观察者将在此新轴周围指定的角速度为滚动的自行车车轮吗？

答案:骑车人观察车轮时，绕着重心沿轴线旋转时，分配给车轮的𝜔相同。

为了验证这个答案,让我们用它来计算从一个静止观察者的角度滚轮上方的线速度.如果我们称之为车轮半径R,顶部是从至P在图11-6的轴线一定距离2R,所以在顶部的线速度应为(使用等式11-2)

在图11-4C完全一致.您可以类似地验证图11-4c中点O和点P所示的车轮部分的线速度.

**11-2 滚动的力和动能** 2021年3月26日15点47分——2021年4月15日15点58分

**滚动的动能**

现在让我们计算由固定观察者测量的滚轮的动能.如果在图11-6中将滚动视为绕轴的纯旋转,则根据公式10-34,我们得到

其中𝜔是车轮的角速度,是车轮绕着通过的旋转轴的惯量.根据等式10-36的平行轴定理,我们得到

其中是车轮的质量,是其绕通过其质心的轴的旋转惯量,而R(车轮的半径)是垂直距离h.将公式11-4代入公式11-3,我们得到

并使用关系(公式11-2)得出

我们可以把项解释为与车轮绕通过其质心的轴旋转相关的动能(图11-4a),将项解释为与车轮质心的平移运动相关的动能.因此,我们有以下规则:

**滚动物体具有两种类型的动能:由于其绕其质心旋转而产生的旋转动能()和由于其质心的平移而产生的平移动能()**.

**滚动的力**

**摩擦力和滚动**

如图11-3所示,如果车轮以恒定速度滚动,则车轮在接触点P处没有滑动的趋势,因此摩擦力不会作用于接触点.但是,如果在滚轮上施加了一个净力以使其加速或减速,则该净力将导致沿行进方向的质心产生加速度.它也会使车轮旋转得更快或更慢,这意味着它会产生角加速度.这些加速度趋向于使车轮在P处滑动.因此,摩擦力必须在P处作用在车轮上,以抵抗这种趋势.

如果车轮不滑动,则该力为静摩擦力,并且运动是平滑滚动.然后,我们可以通过相对于时间(在R保持恒定的情况下)微分方程11-2来关联线性加速度的大小和角加速度.左侧的是,右侧的是.因此,为了平稳滚动,我们有

如果在作用有净力时车轮确实滑动,则在图11-3中作用于P的摩擦力为动摩擦力.因此,该运动不是平滑滚动,并且公式11-6不适用于该运动.在本章中,我们仅讨论平滑滚动运动.

图11-7显示了一个示例,其中在比赛开始时,就像在自行车上一样,使车轮沿着平坦表面向右滚动的同时使车轮旋转得更快.更快的旋转趋向于使车轮的底部在点P处向左滑动.指向右边的P处的摩擦力与这种滑动趋势相反.如果车轮不滑动,则该摩擦力为静态摩擦力(如图所示),则该运动为平滑滚动,并且公式11-6适用于该运动.(如果没有摩擦,自行车比赛将是固定的,并且非常无聊.)

如果使图11-7中的车轮旋转得较慢,例如自行车上减速,我们将通过两种方式更改图像:质心加速度与点P处摩擦力的方法朝左.

**滚下斜坡**

图11-8显示了质量为且半径为的圆形均匀物体,沿x轴以角度顺着坡道顺畅地滚动.我们想找到一个表示物体加速度的表达式，即沿斜坡向下的.为此,我们在线性形式()和角度形式()中都使用牛顿第二定律.

我们首先绘制如图11-8所示的作用在身体上的力:

1. 作用在物体上的重力直接朝下.向量的尾巴位于物体的质心.沿斜坡的分量为,等于.
2. 法向力垂直于斜坡.它作用在接触点上,但在图11-8中,矢量已沿其方向移动,直到其尾部位于物体的质心.
3. 静摩擦力作用在接触点P上,并指向斜坡.(您知道为什么吗?如果车身在P处滑动.它将沿斜坡滑落.因此,与滑动相对的摩擦力必须在斜坡上.)

我们可以将牛顿第二定律写成沿图11-8中的轴的分量()为

该方程包含两个未知数和.(我们不应该假设处于最大值,我们所知道的是,的值恰好使物体顺滑地滑下坡道而不会滑动.)

现在,我们希望将牛顿第二定律以角度形式应用于物体绕其质心的旋转.首先,我们将使用公式10-41编写关于该点的物体扭矩.摩擦力具有力矩臂,因此产生转矩,该转矩为正,因为它倾向于使车身在图11-8中沿逆时针方向旋转.力g和在质量中心附近具有零力矩臂,因此产生零扭矩.因此,我们可以将绕物体质心的轴的牛顿第二定律()的角形式写为:

该方程式包含两个未知数和.

因为物体平稳地滚动,所以我们可以使用公式11-6关联未知数和.但是我们必须谨慎,因为这里为负(沿轴的负方向),而为正(逆时针).因此,我们将公式(11-8)中的替换为.然后,求解,我们得到

用公式11-9的右侧替换公式11-7中的,然后得出

我们可以使用该方程求出任何物体沿与水平面成角度倾斜时的线性加速度.

请注意,重力的拉动会使物体下降,但正是摩擦力使车身旋转并因此滚动.如果消除了摩擦(例如,用冰或油脂使坡道光滑)或使超过,则消除了平滑滚动,车身滑下了坡道.

**11-3 溜溜球** 2021年3月26日17点49分

溜溜球是一个可以放在口袋里的物理实验室.如果悠悠球沿其弦线滚动一段距离,它会损失量为的势能,但会获得平移()和旋转()形式的动能.当它重新爬升时,它会失去动能并重新获得势能.

在现代溜溜球中,拉绳不系在轴上,而是绕在轴上.当溜溜球“抵达”拉绳的底部时,拉绳上的轴上的向上力会阻止下降.然后,溜溜球仅在旋转动能的作用下在轴内部循环旋转.悠悠球一直在旋转(“睡觉”),直到您通过拉动琴弦“唤醒”它,使琴弦紧紧地挂在车轴上,然后悠悠球又爬回去.通过将yo-yo向下抛掷，可以大大增加其底部的yo-yo的旋转动能（并因此降低睡眠时间）,以便它以初始速度和starts向下滚动而不是向下滚动从休息。

为了找到溜溜球沿线滚动的线性加速度的表达式，我们可以使用牛顿第二定律（呈线性和角度形式）,就像我们使身体沿坡道沿图11-8滚动一样.除以下内容外,分析相同:

1. 悠悠球不是沿着与水平面成角度的坡道向下滚动.而是与与水平面成角度的弦向下滚动.
2. 溜溜球不是在其外表面以半径R滚动,而是在半径的轴上滚动（图11-9a）。
3. 悠悠球没有受到摩擦力的影响而变慢,而是受弦上的力的影响而变慢了(图11-9b),

该分析将再次导致我们得出公式11-10.因此,让我们仅更改公式11-10中的符号,并设置即可将线性加速度写为

其中是悠悠球绕其中心的旋转惯量,是其质量.悠悠球在向上爬升时具有相同的向下加速度.

**11-4 扭矩回顾** 2021年3月26日18点02分——2021年5月6日11点36分

在第10章中,我们为可绕固定轴旋转的刚体定义了扭矩𝜏.现在,我们扩展扭矩的定义,以将其应用于沿相对于固定点(而不是固定轴)的任何路径移动的单个粒子.该路径不再需要是圆,并且我们必须将转矩写为可以有任何方向的矢量.我们可以使用公式来计算扭矩的大小,并使用叉积的右手定则确定其方向.

图11-10a在平面中的点A处显示了这样的粒子.该平面上的一个力作用在粒子上,粒子相对于原点O的位置由位置矢量给出.相对于固定点作用在粒子上的扭矩是一个矢量,定义为

我们可以使用模块3-3中的规则,在的定义中评估向量(或叉)乘积.为了找到的方向,我们滑动向量(不改变其方向),直到其尾部位于原点处,以使向量乘积中的两个向量从尾到尾,如图11-10b所示.然后,我们使用图3-19a中的右手法则,将右手的手指从(乘积中的第一个向量)扫到(第二个向量).然后,伸出的右手拇指将给出的方向.在图11-10b中,它沿z轴的正方向.

为了确定的大小,我们应用公式3-27的一般结果(),求出

其中是向量和之间的夹角.从图11-10b中,我们可以看到公式11-15可以重写为

其中是垂直于的分量.从图11-10c中,我们看到公式11-15也可以重写为

其中是的力矩臂（O与的作用线之间的垂直距离）.

**11-5 角动量** 2021年3月26日18点13分——2021年4月16日10点51分

回想一下,线性动量的概念和线性动量守恒的原理是非常强大的工具.它们使我们能够在不知道碰撞细节的情况下预测两辆汽车发生碰撞的结果.在这里,我们开始讨论的角向对应项，并在模块11-8中以守恒原理的角向对应关系结束,这可以在芭蕾,花式潜水,滑冰以及许多其他方面带来美丽(几乎是神奇的)壮举.其他活动.

图11-12显示了质量为的粒子,它在平面中通过点时具有线性动量.该粒子相对于原点O的**角动量**是一个矢量,定义为

其中是粒子相对于的位置向量.当粒子相对于沿其动量的方向移动时,位置向量围绕O旋转.动量大约为O时,粒子本身不必绕O旋转.比较方程11-14和11-18表明,角动量与线性动量具有与扭矩施加的力相同的关系.角动量的SI单位是千克·平方千米每秒(),等于焦耳秒().

**方向** 要在图11-12中找到角动量矢量的方向,请滑动矢量直到其尾部位于原点.然后对矢量乘积使用右手定则,手指从扫到.然后,伸出的拇指表明的方向在图11-12中沿轴的正方向.当粒子移动时,该正方向与位置矢量绕z轴逆时针旋转一致.(的负方向与绕z轴的顺时针旋转一致.)

**大小** 为了找到的大小,我们使用公式3-27的一般结果来写:

其中是这两个向量从尾到尾时和之间的较小角度.从图11-12a中,我们可以看到公式11-19可以重写为

其中是垂直于的的分量,而是垂直于的的分量.从图11-12b中,我们看到公式11-19也可以重写为

其中是O与的扩展之间的垂直距离.

**注意** 在此注意两个特征: (1)角动量仅在指定的原点才有意义; (2)角动量的方向始终垂直于由位置和线性动量矢量和形成的平面.

**11-6 牛顿第二定律的角形式** 2021年3月26日18点21分——2021年4月16日11点25分

牛顿第二定律的形式为

表示单个粒子的力和线性动量之间的紧密关系.我们已经看到了线性量和角度量之间足够的平行度,可以肯定地确定转矩和角动量之间也存在紧密的关系.在公式11-22的指导下,我们甚至可以猜测它必须是

公式11-23实际上是单个粒子的牛顿第二定律的角形式:

**作用在粒子上的所有转矩的(矢量)总和等于该粒子的角动量的时间变化率**.

除非相对于同一点(通常使用的是坐标系的原点)定义了转矩和角动量,否则公式11-23没有意义.

**公式11-23的证明**

我们从公式11-18开始,它是粒子角动量的定义:

其中是粒子的位置矢量,而是粒子的速度.取等式两边的时间导数得到

但是,是粒子的加速度,而是粒子的速度.因此我们可以将公式11-24重写为

现在(任何矢量与其自身的矢量积为零,因为两个矢量之间的夹角必定为零).因此,消除了该表达式的最后一项,然后我们得到

现在,我们使用牛顿第二定律()将替换为其相等,即作用在粒子上的力的矢量和,得到

在这里,符号表示我们必须将所有力的矢量积相加.但是,根据公式11-14,我们知道这些矢量乘积中的每一个都是与一种力相关的转矩.因此,公式11-25告诉我们

这是公式11-23,我们着手证明了这一关系.

**11-7 刚体的角动量** 2021年3月26日18点28分——2021年4月16日12点16分

**粒子系统的角动量**

现在我们将注意力转向相对于原点的粒子系统的角动量.系统的总角动量是单个粒子的角动量的(矢量)总和(此处带有标签):

随着时间的流逝,由于粒子之间或与外界的相互作用,单个粒子的角动量可能会发生变化. 通过采用公式11-26的时间导数,我们可以找到的结果变化.因此,

从公式11-23,我们看到等于第个粒子的净转矩.我们可以将公式11-27重写为

也就是说,系统角动量的变化率等于其各个粒子上的转矩的矢量和.这些转矩包括内部转矩(由于粒子之间的力)和外部转矩(由于系统外部物体对粒子的力).但是,粒子之间的力在第三定律中总是成对出现,因此它们的扭矩总和为零.因此,唯一可以改变系统总角动量的转矩就是作用在系统上的外部转矩.

**净外部扭矩** 令代表净外部转矩,即系统中所有粒子上所有外部转矩的矢量和.然后我们可以将公式11-28写成

这是牛顿的第二定律.它说:

作用在粒子系统上的净外部转矩等于系统总角动量的时间变化率.

公式11-29类似于(公式9-27),但需要特别注意:扭矩和系统的角动量必须相对于同一原点进行测量.如果系统的质心相对于惯性系没有加速,则该原点可以是任何点.但是,如果它正在加速,则它必须是起点.例如,将轮子视为粒子系统.如果它绕相对于地面固定的轴旋转,则应用公式11-29的原点可以是相对于地面固定的任何点.但是,如果它绕加速轴旋转(例如,当它滑下坡道时),则原点只能在其质心处.

**刚体绕固定轴旋转的角动量**

接下来,我们评估形成一个绕固定轴旋转的刚体的粒子系统的角动量.图11-15a显示了这样的主体.固定旋转轴为z轴,并且主体旋转以恒定的角速度围绕它.我们希望找到物体围绕该轴的角动量.

我们可以通过将物体内质量元素的角矩的z分量相加来找到角动量.在图11-15a中,质量为的典型质量元素沿圆形路径绕轴移动.质量元素的位置通过位置矢量相对于原点O定位.质量元素的圆形路径的半径为,即元素与轴之间的垂直距离.

相对于O,此质量元素的角动量的大小由公式11-19给出:

其中和是质量元素的线性动量和线速度,而是和之间的角度.图11-15b中显示了质量元素的角动量矢量;图11-15b中显示了该角动量矢量.其方向必须垂直于和的方向.

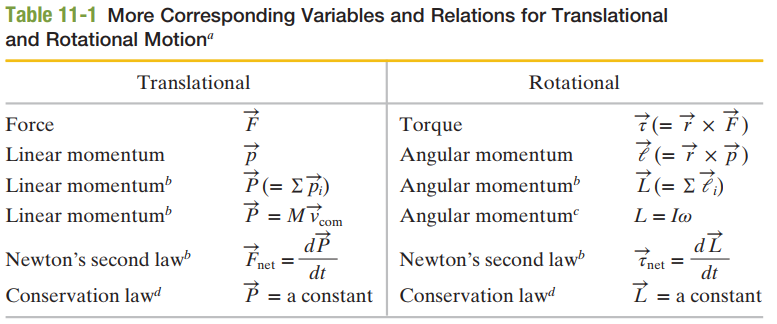
**z分量** 我们对平行于旋转轴(此处为z轴)的分量感兴趣.那个z分量是

通过将构成刚体的所有质量元素的总和相加,可以得出整个旋转刚体的角动量的z分量.因为,我们可以写

我们可以在这里从求和中删除,因为它对于旋转刚体的所有点都具有相同的值.

公式11-30中的是物体绕固定轴的转动惯量(请参见公式10-33).因此,公式11-30简化为

我们删除了下标z,但您必须记住,公式11-31定义的角动量是围绕旋转轴的角动量.同样,该方程式中的是绕同一轴的旋转惯量.表11-1是对表10-3的补充,它扩展了我们相应的线性和角度关系列表.



**11-8 角动量守恒** 2021年3月26日18点49分——2021年4月16日14点35分

到目前为止,我们已经讨论了两个强大的守恒定律,即能量守恒和线性动量守恒.现在,我们遇到了涉及角动量守恒的第三种定律.我们从公式11-29开始,这是牛顿第二个角定律.如果没有净外部扭矩作用在系统上,则该方程变为,或者

这个结果称为**角动量守恒定律**,也可以写成

公式11-32和11-33告诉我们:

**如果作用在系统上的净外部扭矩为零,则无论系统内发生什么变化,系统的角动量都保持恒定**.

公式11-32和11-33是向量公式;因此,它们等效于三个分量方程,三个方程对应于在三个相互垂直方向上的角动量守恒.根据作用在系统上的扭矩,系统的角动量可能只在一个或两个方向上守恒,而不是在所有方向上都守恒:

**如果沿着某个轴的系统上的净外部转矩分量为零,则无论系统内部发生什么变化,系统沿该轴的角动量分量都无法改变**.

这是一个有力的声明:在这种情况下,我们只关注系统的初始状态和最终状态;我们不需要考虑任何中间状态.

我们可以将此定律应用于图11-15中的孤立物体,该物体绕轴旋转.假设初始刚体以某种方式相对于该旋转轴重新分配其质量,从而更改其绕该轴的旋转惯量.公式11-32和11-33指出物体的角动量不能改变.将方程式11-31(沿旋转轴的角动量)代入方程式11-33,我们将守恒律写为

在此,下标指的是质量再分配之前和之后的转动惯量和角速度的值.

像我们讨论过的其他两个守恒定律一样,方程11-32和11-33不受牛顿力学的限制.它们适用于速度接近光速的粒子(在狭义相对论统治的地方),而在亚原子粒子的世界(量子物理学统治的地方)仍然是正确的.一直没有发现角动量守恒定律的例外.

现在我们讨论涉及该法的四个例子.

**纺纱志愿者** 图11-16展示了一个学生坐在凳子上,该凳子可以绕垂直轴自由旋转.该学生已经以适当的初始角速度旋转了,他伸出的手中握着两个哑铃.他的角动量矢量沿垂直旋转轴指向上.

导师现在要学生拉起他的手臂;这个动作将他的转动惯量从其初始值减小到一个较小的值,因为他将质量移动到更靠近转动轴的位置.他的旋转速度从到显着增加.然后,学生可以通过再次伸出双臂,向外移动哑铃来放慢速度.没有净外部转矩作用于由学生,凳子和哑铃组成的系统.因此,无论学生如何操纵哑铃,该系统围绕旋转轴的角动量都必须保持恒定.在图11-16a中,学生的角速度相对较低,而他的旋转惯量相对较高.根据公式11-34,在图11-16b中他的角速度必须更大,以补偿减小的.

**跳水运动员** 图11-17显示了一名潜水员进行单人和半身向前突击潜水.如您所料,她的质心遵循抛物线路径.她绕着重心离开轴线离开跳板,并具有一定的角动量,该角动量由指向图11-17平面的,垂直于页面的向量表示.当她处于空中时,没有净外部扭矩作用在她的质心周围,因此她在质心周围的角动量无法改变.通过将手臂和腿拉到闭合的折缝位置，她可以显着减小绕同一轴的旋转惯性，因此，根据公式11-34，可以显着提高其角速度.潜水结束时从折合位置拉出(进入开放布局位置)会增加旋转惯性,因此会降低旋转速度,因此可以很少溅水进入水中.即使在涉及扭转和翻筋斗的更复杂的潜水中,在整个潜水过程中,潜水员的角动量在大小和方向上都必须保持不变.

**跳远** 当运动员以奔跑的跳远动作从地面起飞时,发射脚上的力会为其赋予角动量,并绕水平轴向前旋转.这样的旋转将不允许跳线正确着地:在着陆时,双腿应并拢并向前倾斜一定角度,以使脚后跟在最大距离处标记沙子.一旦在空中传播,角动量就无法改变(保持),因为没有外部扭矩作用来改变它.但是,跳线可以通过以风车的方式旋转臂来将大部分角动量转移到臂上(图11-18).然后,身体保持直立,并以正确的方向着陆.

**芭蕾** 在巡回赛中,芭蕾舞演员用一只脚在地板上以较小的扭曲动作跳跃,而另一只脚则保持与身体垂直(图11-19a).角速度是如此之小,以至于听众可能看不到.随着表演者的上升,伸出的那只腿被放低,另一只腿被抬起,两条腿都以与身体成角度θ结束（图11-19b）。 动作很优美，但也可以增加旋转角度,因为引入最初伸展的腿会降低表演者的旋转惯量.由于没有外部扭矩作用于机载表演者,因此角动量无法改变.因此,随着旋转惯性的减小,角速度必须增大.当跳跃动作执行得当时,表演者似乎突然开始旋转并旋转180°,然后反转初始的腿部姿势,为降落做准备. 一旦腿再次伸出,旋转似乎消失了.

**11-9 陀螺仪的旋进** 2021年3月26日19点09分——2021年4月16日14点54分

一个简单的陀螺仪包括一个固定在轴上并可以绕轴线自由旋转的轮子.如果将非旋转陀螺仪的轴的一端放在支架上(如图11-22a所示),然后松开陀螺仪,则陀螺仪会通过围绕支架尖端向下旋转而掉落.由于坠落涉及旋转,因此它受牛顿第二定律以角度形式控制,如公式11-29所示:

该方程告诉我们,导致向下旋转(下降)的转矩从其初始值零改变了陀螺仪的角动量.扭矩是由于重力作用在陀螺仪的质心上,我们将其视为在车轮的中心.相对于支撑尖端的力矩臂(在图11-22a中位于O处)为.的大小为

(因为和之间的角度为90°),其方向如图11-22a所示.

快速旋转的陀螺仪的行为有所不同.假设以轴稍微向上倾斜的角度将其释放.它首先略微向下旋转,但是当它仍然绕着其轴旋转时,它开始通过支撑点O绕垂直轴水平旋转,称为旋进.

**为什么不跌倒？** 为什么旋转陀螺仪会保持在高处而不是像非旋转陀螺仪那样掉下来？提示是,当旋转陀螺仪被释放时,由于引起的转矩必须不改变初始角动量零,而应改变由于自旋而已经存在的一些非零角动量.

要查看此非零初始角动量如何导致旋进,我们首先考虑陀螺仪的自旋角动量.为了简化这种情况,我们假设旋转速度非常快,使得旋进引起的角动量相对于可以忽略不计.当旋进开始时,我们还假定轴是水平的,如图11-22b所示.的大小由公式11-31给出:

其中是陀螺仪绕其轴的旋转动量,是车轮绕轴旋转的角速度.向量沿轴指向,如图11-22b所示.由于平行于,因此扭矩必须垂直于.

根据公式11-41,转矩将在增量时间间隔内使陀螺仪的角动量产生增量变化;那是,

但是,对于快速旋转的陀螺仪,的大小由公式11-43固定.因此,转矩只能改变的方向,而不能改变其大小.

从公式11-44中，我们可以看到的方向是垂直于的方向.可以在方向上更改且不更改大小L的唯一方法是使绕z轴旋转,如图11-22c所示.保持其大小,向量的头遵循一条圆形路径,而始终与该路径相切.由于必须始终沿轴指向,因此轴必须沿z轴沿方向旋转.因此,我们有进动.因为旋转的陀螺仪必须响应牛顿的定律,以响应其初始角动量的任何变化,所以陀螺仪必须进位,而不是仅仅倾倒.

**旋进** 我们首先可以使用公式11-44和11-42求出的大小,从而可以找到进动率:

当在增量时间间隔中以增量变化时,轴和绕z轴进动,增量角为.(在图11-22c中,为清晰起见,放大了角.)借助公式11-43和11-45,我们发现由下式给出:

将这个表达式除以并设置比率,我们得到

该结果在自旋速率𝜔是快速的假设下是有效的.注意,随着𝜔的增加,减小.还要注意的是,如果重力不作用在陀螺仪上,则不会有进动,但由于是的函数,因此质量会从公式11-46抵消;因此,因此,与质量无关.

如果旋转陀螺仪的轴与水平方向成一定角度,则公式11-46也适用.它也适合于陀螺,陀螺本质上是与水平方向成一定角度的陀螺仪.